UNINOVE
Universidade Nove de Julho
A UNINOVE É SEMPRE 10

MÉTODOS HEURÍSTICOS E METAHEURÍSTICOS

Aplicações em Problemas de Otimização Combinatória

Prof. Dr. Peterson A. Belan

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO	
AULA	**DESCRIÇÃO**
1ª	Conceitos gerais sobre otimização e grafos; Introdução aos métodos heurísticos e metaheurísticos – conceitos, justificativa de uso, vantagens e desvantagens, aplicações, dificuldades no desenvolvimento de algoritmos eficientes para a solução dos problemas de otimização. Problema do Caminho Mínimo (PCM), Problema do Caixeiro Viajante (PCV) e Problema da Mochila (PM).
2ª	Representação de problemas de busca (espaço de estados, estado inicial, estado final e ações), noção de vizinhança. Algoritmos de busca para solução do PCM: menor custo, Dijkstra, melhor estimativa (busca gulosa) e A*. Avaliação de soluções encontradas pelos algoritmos de busca.
3ª	Métodos de busca local e global, Método Randômico, Busca Exaustiva e Subida de Encosta
4ª	Busca Tabu
5ª	Método de Pesquisa em Vizinhança Variável (VNS)
6ª	Simulated Annealing
7ª	Greedy Randomized Adaptative Search Procedure (GRASP)
8ª	Algoritmos Genéticos (AG)
9ª	Colônia e Formigas
10ª	Enxame de Partículas
11ª	Algoritmos híbridos
12ª	Aplicação de métodos heurísticos e metaheurísticos em problemas de otimização (problema do caminho mínimo, caixeiro viajante e problema da mochila): programação de horários, roteamento de veículos, seqüenciamento de tarefas, formação de células de manufatura, etc.

BIBLIOGRAFIA:

ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. **Pesquisa operacional**, Rio de Janeiro: Elsevier, 2007

CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Introduction to Algorithms**. 2 ed. United States of America: MIT Press, 2001.

DORIGO, M; MANIEZZO, V.; COLORNI, A. Ant System: Optimization by a colony of cooperating agents. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B, v. 26, n. 1, p. 29-41, 1996.

GOLDBARG, M.C.; Luna, H.P.L. **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Rio de Janeiro: Campus, 2005.

RUSSELL, S. J.; NORVIG, P. **Inteligência Artificial**. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2004.

SOUZA, M. J. F. **Inteligência Computacional para Otimização**. Notas de aula, Disponível em: http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/InteligenciaCompucional/InteligenciaComputacional.pdf

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**; 8a. Edição; São Paulo;Pearson Prentice Hall, 2008.

VIANA, G. V. R. **Meta-heurísticas e Programação Paralela em Otimização Combinatória**.

Fortaleza: Edições UFC, 1998.

Aula 1: Algumas definições e conceitos...

Otimização

Otimizar consiste em encontrar valores mínimos ou máximos de uma função, denominada Função Objetivo, a qual envolve uma ou mais variáveis, normalmente com valores em intervalos que delimitam uma região do espaço de busca multi-dimensional.

De forma bastante resumida:
"é o *processo de tentar encontrar a melhor solução possível para um problema*".

Otimização Combinatória

Pode ser definida como um ramo da ciência da computação e da matemática aplicada que visa o estudo de **problemas de otimização em conjuntos finitos**.

Enquanto a teoria clássica de otimização trata de problemas com domínios infinitos, na **otimização combinatória**, o domínio dos problemas é finito.

Otimização Combinatória, em geral, procura encontrar, dentre todos os possíveis subconjuntos que representam a solução de um problema, aquele cujo custo seja o menor possível.

Problemas Clássicos de Otimização Combinatória

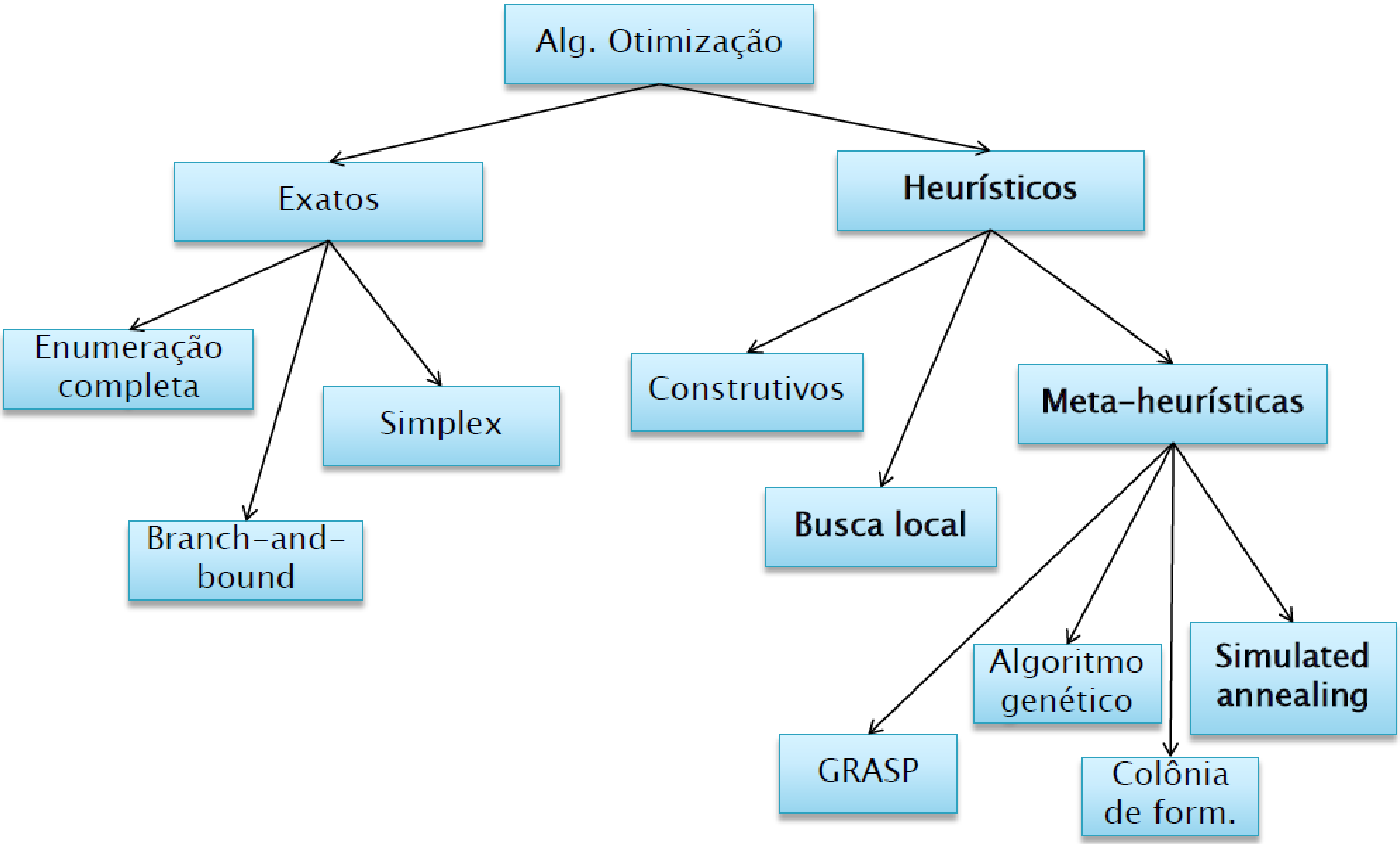
São muitos os problemas de otimização combinatória encontrados na prática. Alguns exemplos são: transmissão de mensagens em redes de comunicação de dados, envio de água em uma rede de distribuição, transporte de carga em uma rede viária, planejamento e programação da produção, programação de projetos, de máquinas e de pessoal, etc.

Muitos desses problemas de otimização podem ser tratados genericamente como Problema de Fluxo Máximo, **Problema do Caminho Mínimo**, **Problema do Caixeiro Viajante** e **Problema da Mochila**, entre outros.

Otimização – Algumas aplicações

- Roteamento (veículos, aeronaves, robôs, etc.)
- Alocação de horários/salas
- Seqüenciamento da produção
- Corte e empacotamento
- Carteira de ações
- Planejamento de Projetos

Métodos de Resolução de Problemas de Otimização



Algoritmos Heurísticos

São algoritmos que levam em conta algum conhecimento extra acerca do problema para guiar o processo de busca.

Ex.

- Algoritmos gulosos (estratégias de busca gulosa)
- Subida/descida de encosta

Algoritmos Metaheurísticos

Uma heurística pode ser definida como uma técnica inspirada em processos intuitivos que procura uma solução factível, não necessariamente a melhor solução, para um determinado problema, com tempo computacional aceitável.

As metaheurísticas se caracterizam por guiarem outras heurísticas e têm sido particularmente interessantes na resolução de problemas complexos de otimização.

Quando usar Algoritmos Heurísticos e Metaheurísticos?

A ideia mais simples e óbvia para se resolver um problema de otimização combinatória é simplesmente enumerar todas as possíveis soluções, testá-las uma a uma e escolher a melhor. Em outras palavras, criar todos os subconjuntos possíveis a partir do conjunto de variáveis de decisão do problema e das regras de restrição e escolher aquele que minimiza ou maximiza a função objetivo.

No entanto, isto se torna inviável para a maioria dos problemas práticos devido ao grande número de soluções possíveis. Mesmo utilizando computadores com grande capacidade de processamento, a enumeração de todas as soluções possíveis para um problema de porte razoável se torna impraticável. Nestes casos, a utilização de técnicas “inteligentes”, que forneçam atalhos para a descoberta dos valores ótimos ou “sub-ótimos” para um problema, em tempo computacional aceitável, torna-se muito importante.

Formulação de Problemas de Otimização

Um problema de otimização envolve:

DECISÕES
Identificar quais variáveis de decisão do problema (que decisões resolvem o problema?)

RESTRIÇÕES
Identificar quais as restrições que limitam os valores das variáveis de decisão (quais são as restrições que limitam as decisões a serem tomadas?)

OBJETIVOS
Definir objetivos que permitem indicar que uma decisão é preferível a outras

Problema de otimização - Formulação

Minimizar ou Maximizar **[função(ões) objetivo]**

Sujeito a:

(restrições - equações ou inequações)

(tipos das variáveis de decisão)

Exemplo: problema de otimização da produção

Considere uma microempresa que fabrica dois tipos de produto: rádio standard e rádio luxo. Com relação ao rádio standard temos as seguintes informações:

(i) A linha de produção comporta um máximo de 24 pessoas;
(ii) Cada rádio consome 1homem/dia para ser produzido;
(iii) Cada rádio fornece um lucro de R$ 30,00.

Com relação ao rádio luxo:
(i) A linha de produção comporta um máximo de 32 pessoas;
(ii) Cada rádio consome 2 homens/dia para ser produzido;
(iii) Cada rádio fornece um lucro de R$ 40,00.

A fábrica possui 40 empregados a serem alocados nas duas linhas de produção. O objetivo é maximizar o lucro. Quantos rádios de cada tipo (standard e luxo) devem ser produzidos para maximizar o lucro?

Tal problema pode ser representado matematicamente da seguinte maneira:

$$Maximizar \ \ f(x_1, x_2) = 30x_1 + 40x_2$$

$$Sujeito\, a: x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1 \leq 24$$

$$x_2 \leq 16$$

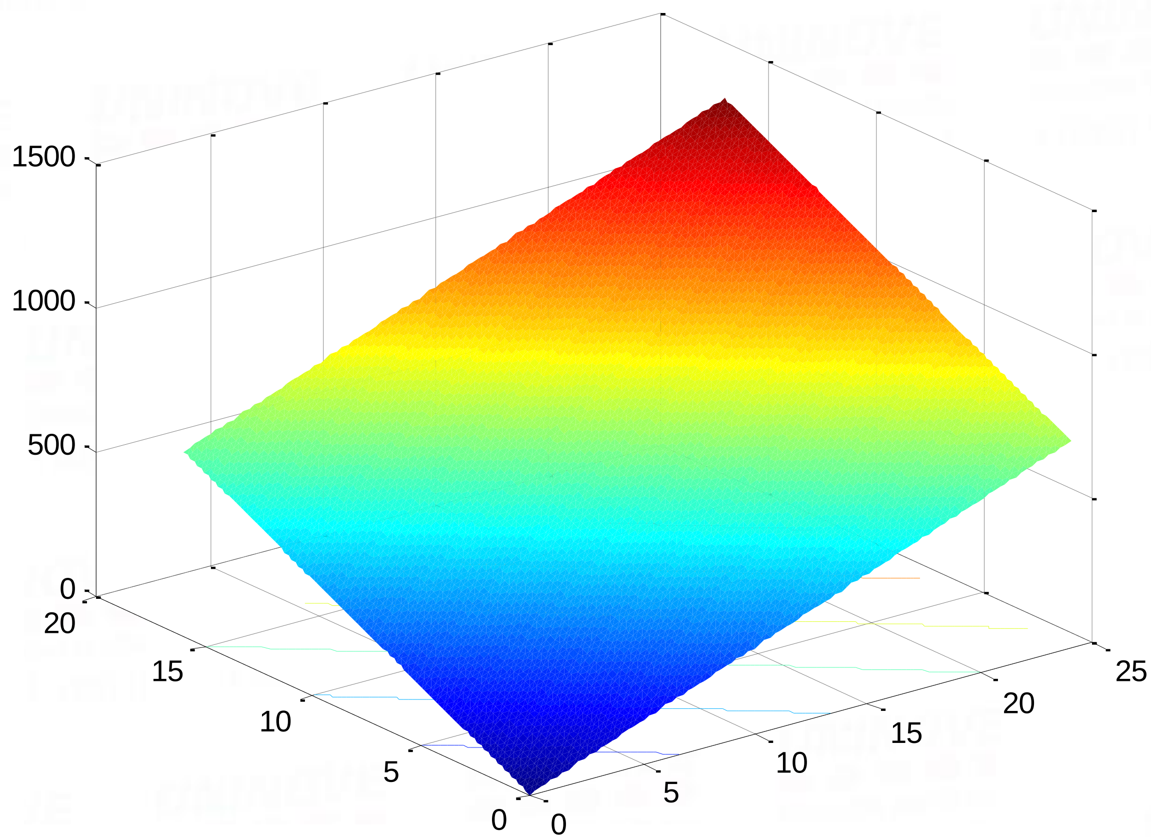
$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0,$$

Espaço de soluções

x_1 \ x_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
24	720	760	800	840	880	920	960	1000	1040	1080	1120	1160	1200	1240	1280	1320	1360
23	690	730	770	810	850	890	930	970	1010	1050	1090	1130	1170	1210	1250	1290	1330
22	660	700	740	780	820	860	900	940	980	1020	1060	1100	1140	1180	1220	1260	1300
21	630	670	710	750	790	830	870	910	950	990	1030	1070	1110	1150	1190	1230	1270
20	600	640	680	720	760	800	840	880	920	960	1000	1040	1080	1120	1160	1200	1240
19	570	610	650	690	730	770	810	850	890	930	970	1010	1050	1090	1130	1170	1210
18	540	580	620	660	700	740	780	820	860	900	940	980	1020	1060	1100	1140	1180
17	510	550	590	630	670	710	750	790	830	870	910	950	990	1030	1070	1110	1150
16	480	520	560	600	640	680	720	760	800	840	880	920	960	1000	1040	1080	1120
15	450	490	530	570	610	650	690	730	770	810	850	890	930	970	1010	1050	1090
14	420	460	500	540	580	620	660	700	740	780	820	860	900	940	980	1020	1060
13	390	430	470	510	550	590	630	670	710	750	790	830	870	910	950	990	1030
12	360	400	440	480	520	560	600	640	680	720	760	800	840	880	920	960	1000
11	330	370	410	450	490	530	570	610	650	690	730	770	810	850	890	930	970
10	300	340	380	420	460	500	540	580	620	660	700	740	780	820	860	900	940
9	270	310	350	390	430	470	510	550	590	630	670	710	750	790	830	870	910
8	240	280	320	360	400	440	480	520	560	600	640	680	720	760	800	840	880
7	210	250	290	330	370	410	450	490	530	570	610	650	690	730	770	810	850
6	180	220	260	300	340	380	420	460	500	540	580	620	660	700	740	780	820
5	150	190	230	270	310	350	390	430	470	510	550	590	630	670	710	750	790
4	120	160	200	240	280	320	360	400	440	480	520	560	600	640	680	720	760
3	90	130	170	210	250	290	330	370	410	450	490	530	570	610	650	690	730
2	60	100	140	180	220	260	300	340	380	420	460	500	540	580	620	660	700
1	30	70	110	150	190	230	270	310	350	390	430	470	510	550	590	630	670
0	0	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	440	480	520	560	600	640

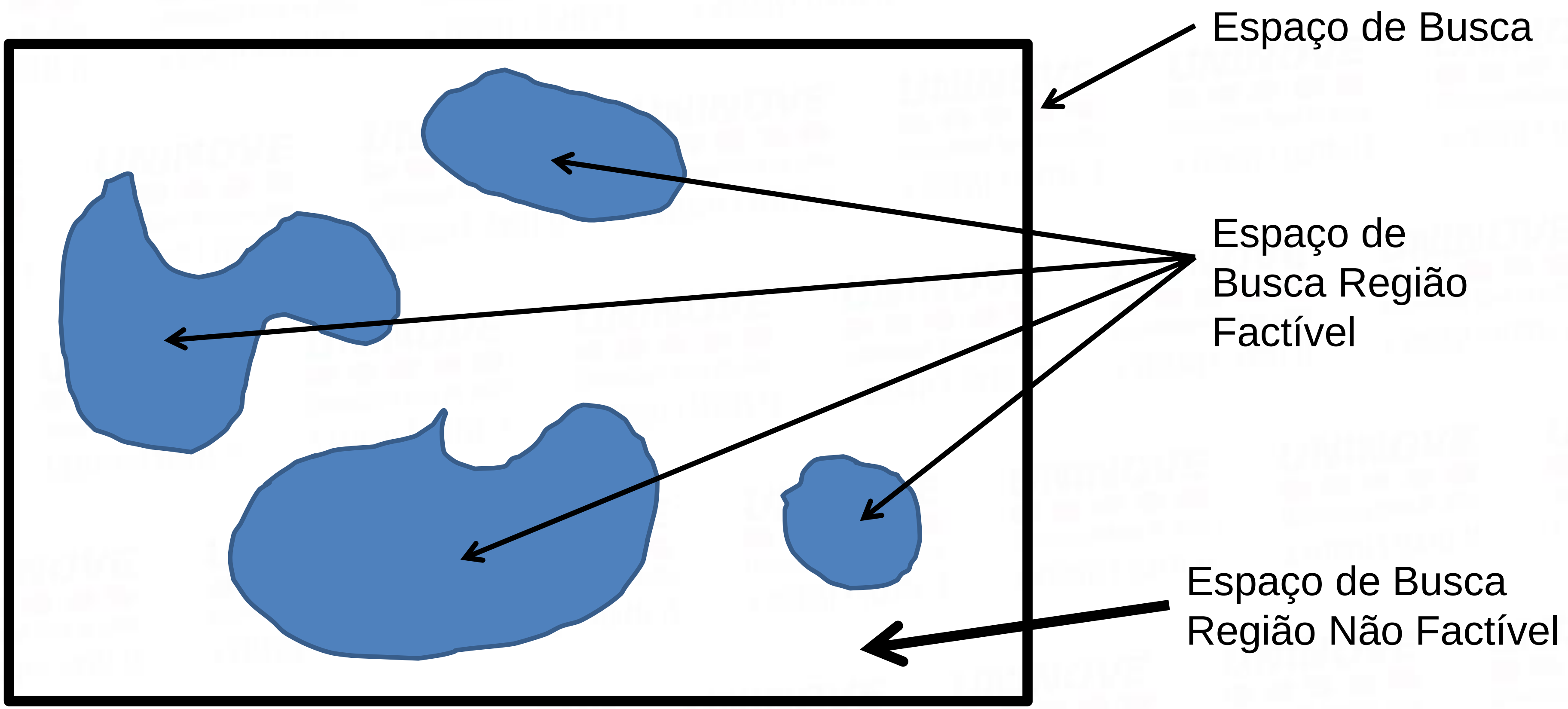
Região factivel   Região não factivel   Máximo global

Espaço de soluções

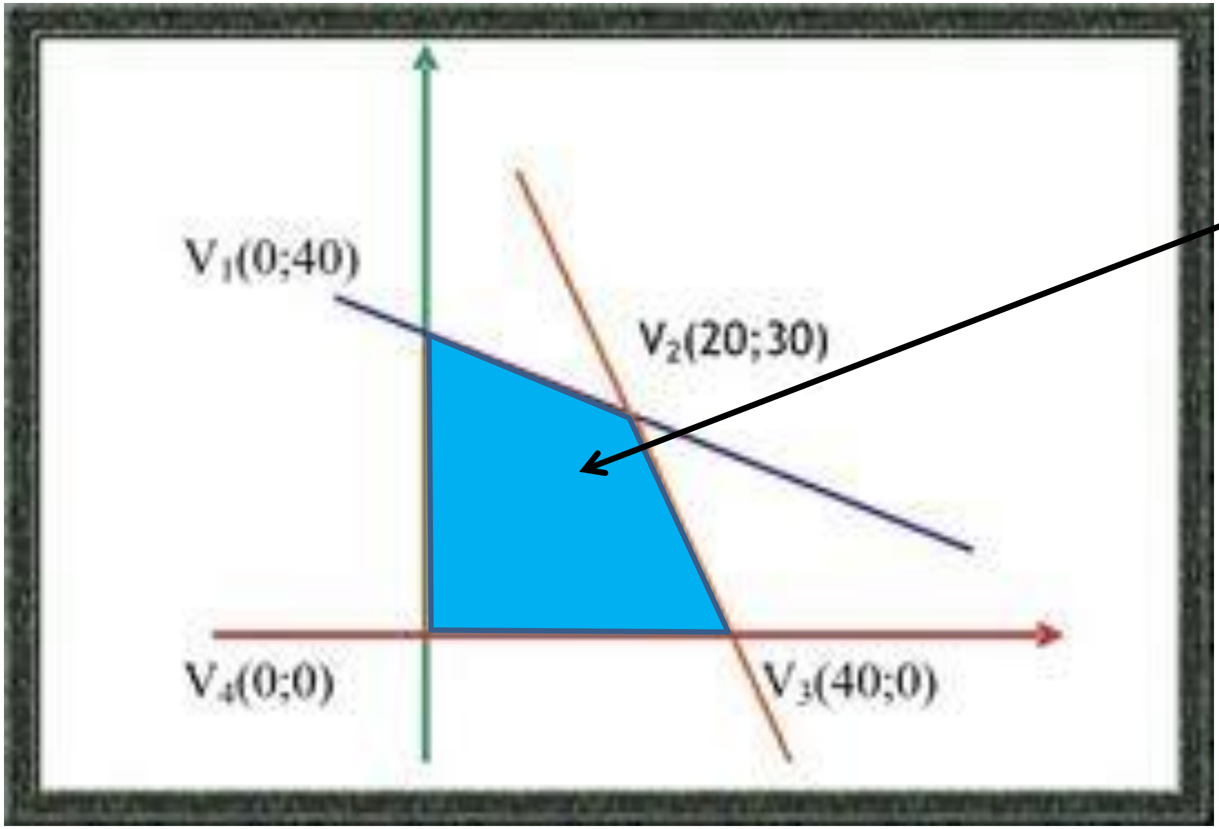


Conceitos sobre espaços de soluções...

Espaço de soluções

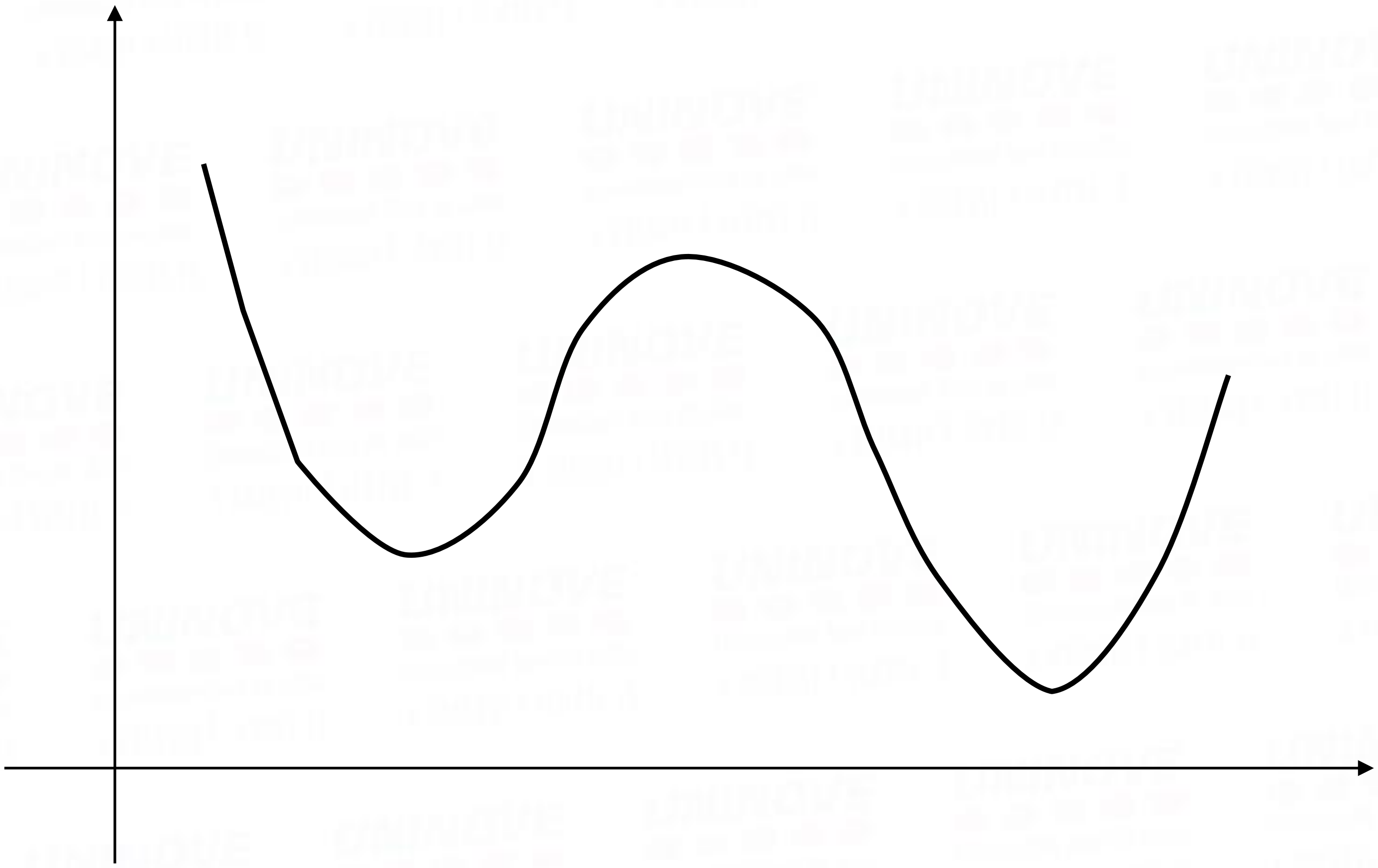


Espaço de soluções (outros exemplos)

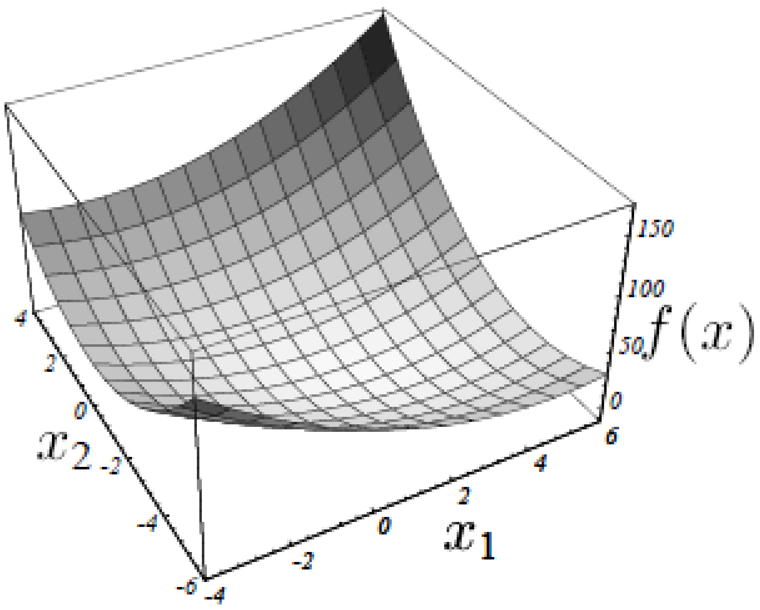


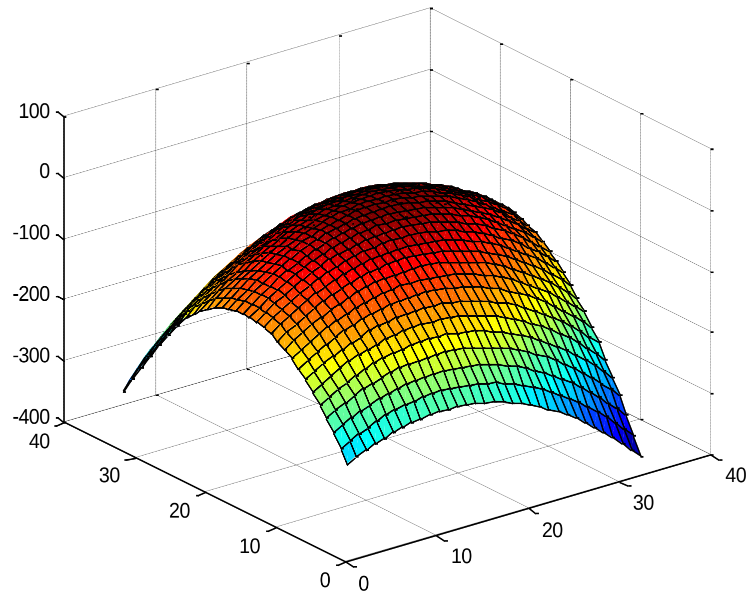
Região Factível

Espaços de soluções – outros exemplos

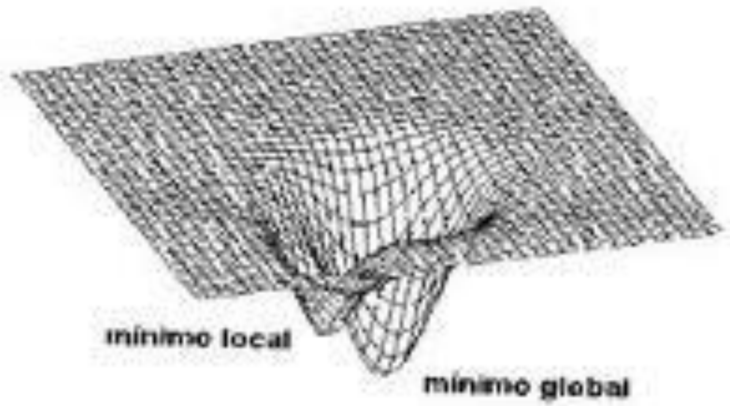


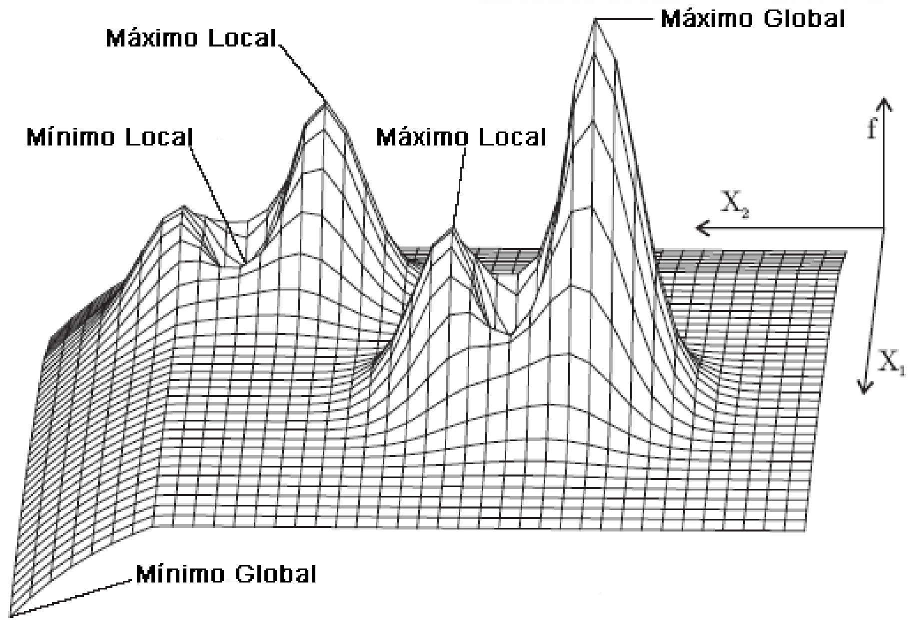
Espaços de soluções – outros exemplos





Espaços de soluções





Noções gerais sobre grafos

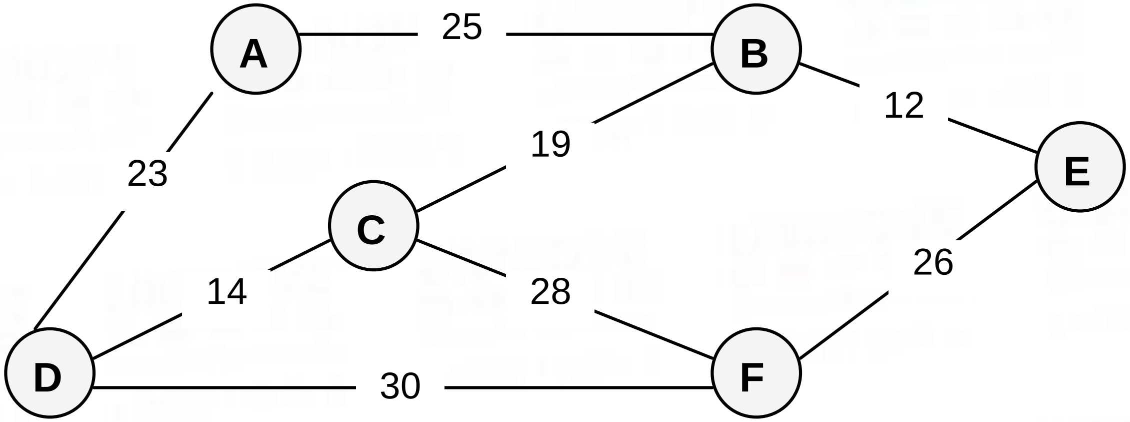
Grafos

Um grafo G(V,A) pode ser definido como um par de conjuntos V e A, no qual:

V são os vértices ou nodos do grafo;

A é o conjunto de pares ordenados a=(i,j), i e j ∈ V: as arestas do grafo.

Exemplo:

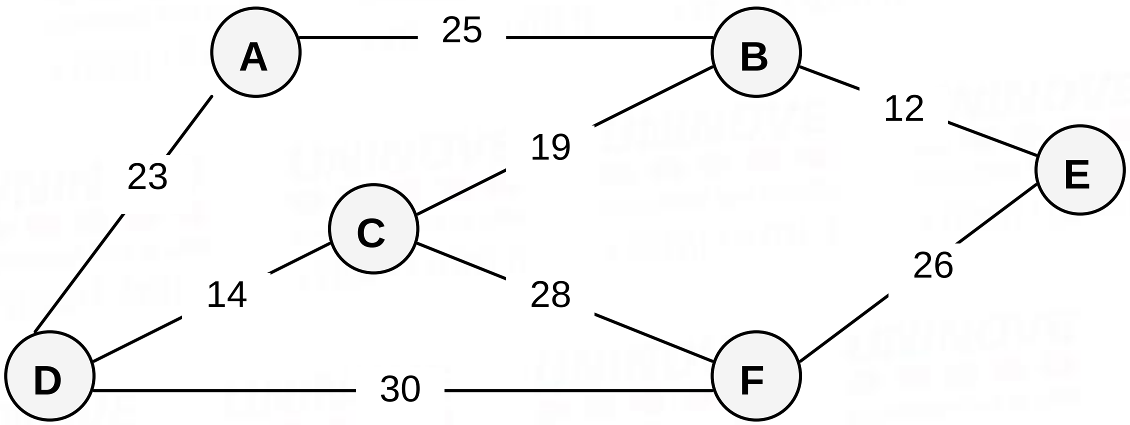


V={A,B,C,D,E,F}

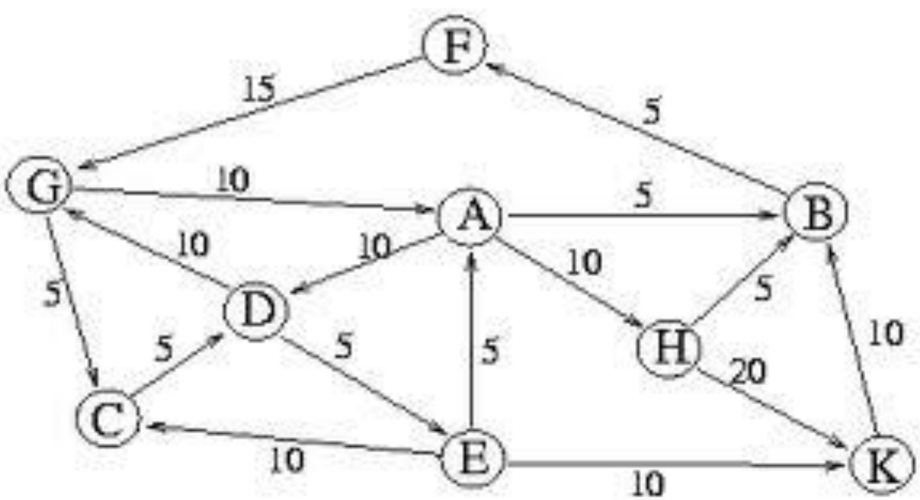
A={(A,B), (A,D), (B,A), (B,C), (B,E), (C,D), (C,F), (D,A), (D,C), (D,F), (E,B), (E,F), (F,C) (F,D), (F,E)}

Grafos - exemplos

Grafo não orientado



Grafo orientado



Matriz de adjacências/distâncias

Uma matriz de adjacências é uma forma de representar um grafo.

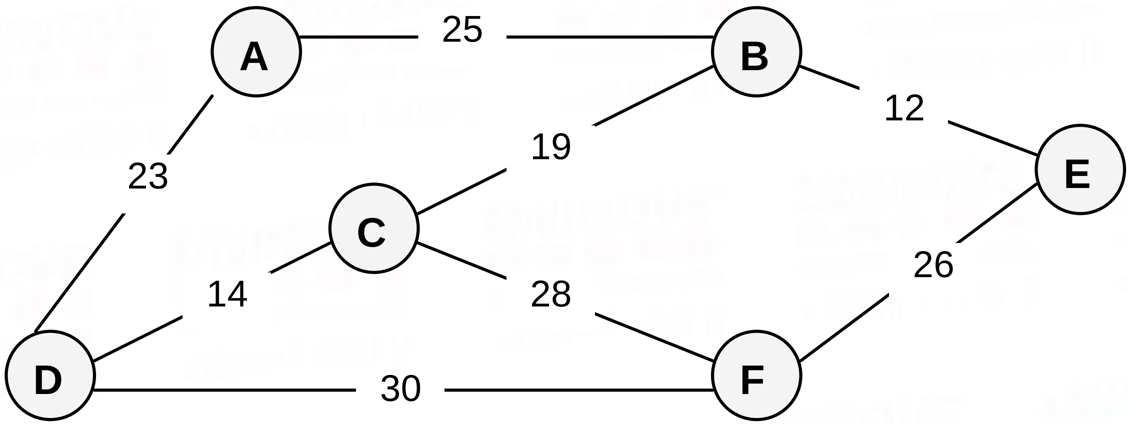
Dado um grafo G(V,A), a matriz de adjacências M é uma matriz de ordem $|V| \times |V|$, tal que:

$|V|$ é o número de vértices
$M[i,j] = 1$, se existir aresta de i a j
$M[i,j] = 0$, se NÃO existir aresta de i a j

Contudo, se as arestas possuírem pesos, $M[i,j]$ deve conter o peso associado com a aresta (i,j). Se não existir uma aresta entre i e j, então utiliza-se um valor que não é usado como peso (Por exemplo, ∞).

Matriz de adjacências - Exemplo

G =



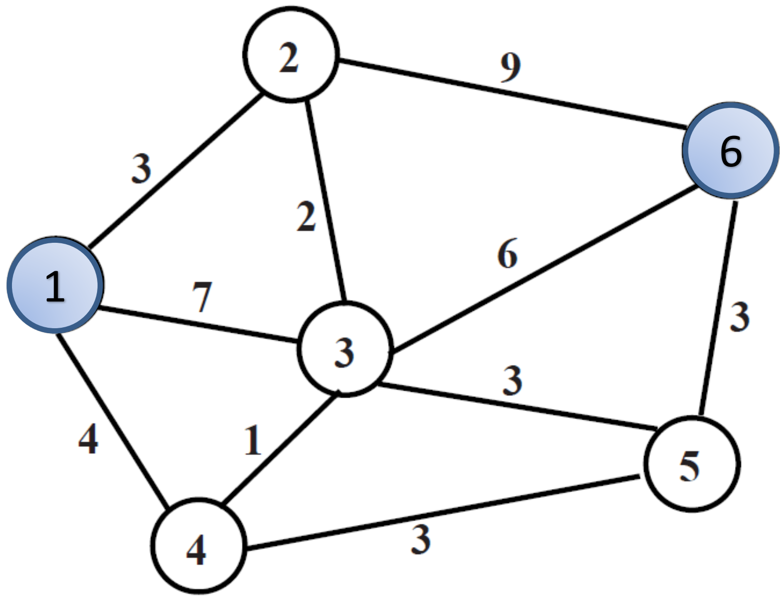
M =

	A	B	C	D	E	F
A	0	25	∞	23	∞	∞
B	25	0	19	∞	12	∞
C	∞	19	0	14	∞	28
D	23	∞	14	0	∞	30
E	∞	12	∞	∞	0	26
F	∞	∞	28	30	26	0

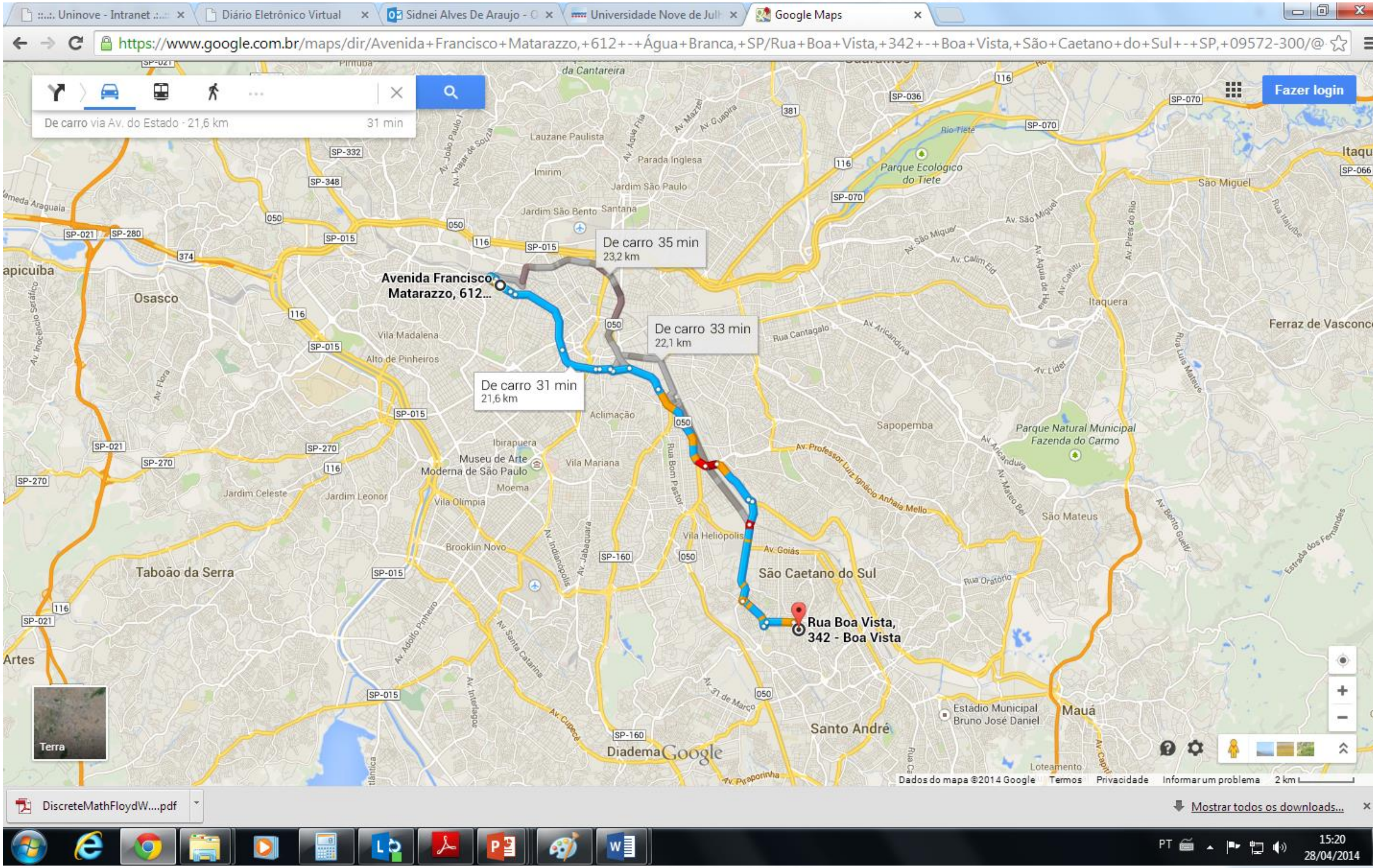
Alguns Problemas Clássicos de Otimização

Problema do Caminho Mínimo (PCM)

Dado um grafo que representa o problema investigado e o par de vértices que indicam a origem e o destino, o PCM consiste em determinar o caminho de menor custo que liga estes dois vértices.

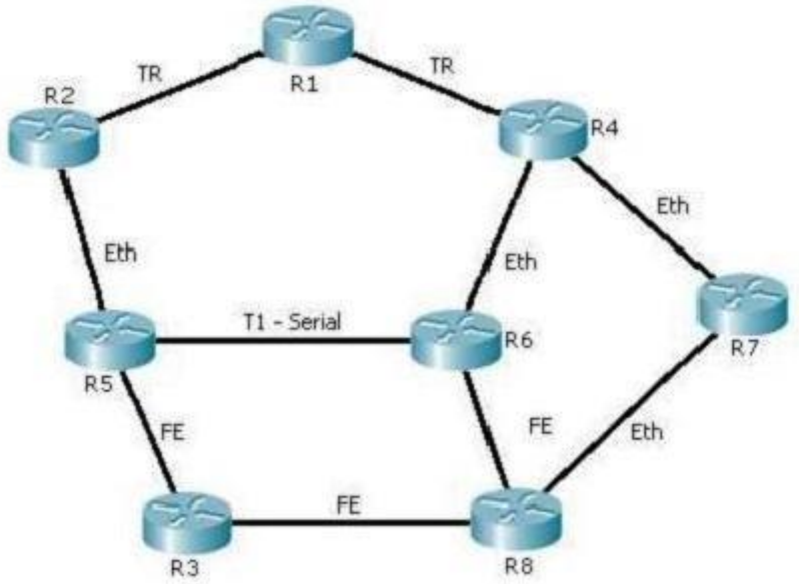


PCM – Exemplo prático 1



UNINOVE
Universidade Nove de Julho
A UNINOVE É SEMPRE 10

PCM – Exemplo prático 2 (roteamento em redes de computadores)

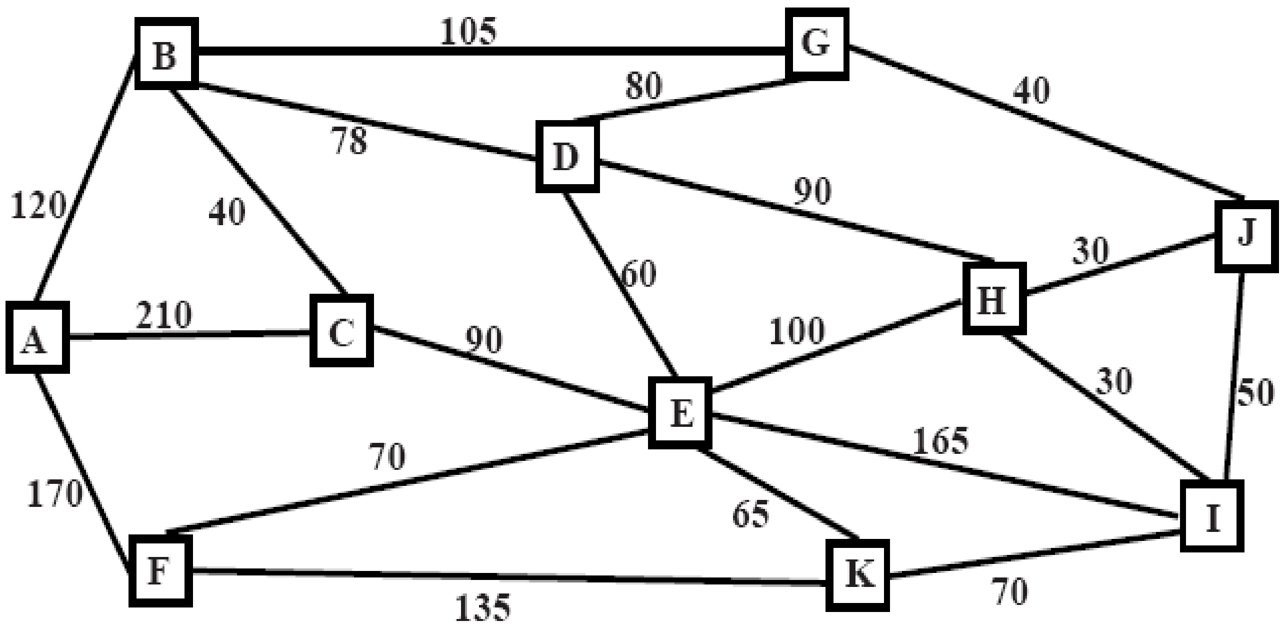


Esse diagrama de rede apresenta oito roteadores (R1 a R8) interligados por tecnologias de rede diferentes. As ligações entre os roteadores foram identificadas com uma sigla referente à tecnologia de rede utilizada. **TR** refere-se à tecnologia Token Ring = 16 Mbps, **Eth** refere-se a Ethernet = 10Mbps, **FE** refere-se a Fast Ethernet = 100Mbps, **T1** refere-se a T1 (serial) = 1,544Mbps

PCM – Exemplo prático 3

PCM – Exemplo prático 4

A rede ilustrada a seguir é a representação de um conjunto de 11 prédios residenciais construídos em uma área afastada da cidade. As linhas ligando os prédios são os canos que foram instalados para a passagem de toda a fiação elétrica, telefônica, etc. e os números próximos às linhas indicam o comprimento (em metros) destes encanamentos. Um esquema de comunicação de dados a ser adotado pelo condomínio implica na colocação de dois dispositivos eletrônicos que deverão ser interligados por um cabo, ficando um na portaria do prédio **A** e outro na portaria do prédio **J**. Que caminho deverá percorrer o cabo para conectar o dispositivo do prédio **A** ao dispositivo do prédio **J**, de forma que o tamanho deste cabo seja o mínimo possível? Quantos metros de cabo serão necessários?



PCM – Formulação matemática

Dado C={c_1, c_2,..., c_N} o conjunto de N cidades, indicando a cidade origem (s) e cidade destino (g), e uma matriz de adjacências d_{ij} onde $d_{ij} = d(c_i, c_j)$, uma maneira de se representar matematicamente o PCM é:

$$Minimizar\ z = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} d_{ij}x_{ij}$$

$$Sujeito\ a: \sum_{j=1}^{N} x_{sj} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} - \sum_{k=1}^{N} x_{jk} = 0 \qquad \forall j \in N - \{s, g\}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ig} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ d_{ij} = \infty\ para\ todo\ i = j$$

Onde: $x_{ij} = \begin{cases} 1, se\ cidade\ j\ pode\ ser\ alcançada\ a\ partir\ da\ cidade\ i \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$

UNINOVE Universidade Nove de Julho A UNINOVE É SEMPRE 10

PCM – Exemplo de solução (1)

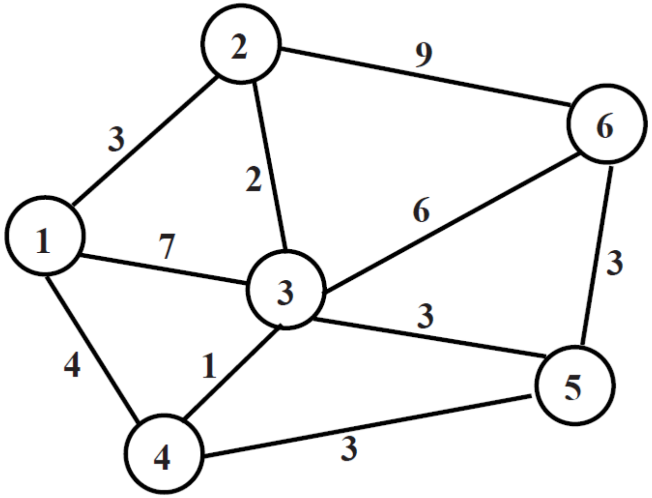
S1 → $\{x_{14}, x_{45}, x_{56}\}$ → Custo $z = 4+3+3 = 10$

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

x_{ij}

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	7	4	∞	∞
2	3	∞	2	∞	∞	9
3	7	2	∞	1	3	6
4	4	∞	1	∞	3	∞
5	∞	∞	3	3	∞	3
6	∞	9	6	∞	3	∞

d_{ij}



PCM – Exemplo de solução (2)

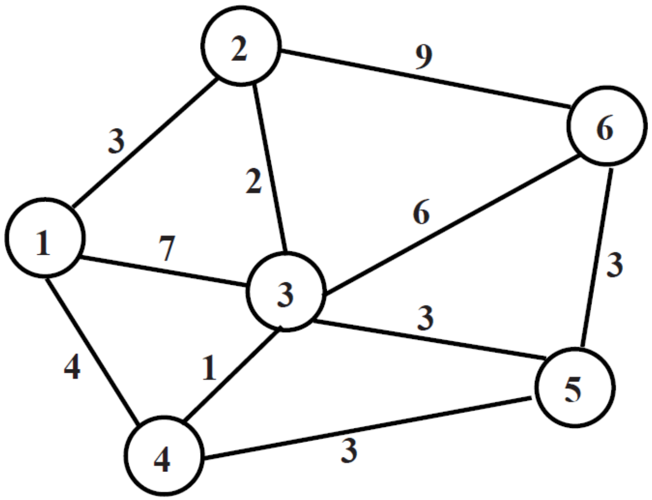
S2 → $\{x_{12}, x_{23}, x_{34}, x_{45}, x_{56}\}$ → Custo z = 3+2+1+3+3 = 12

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

x_{ij}

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	7	4	∞	∞
2	3	∞	2	∞	∞	9
3	7	2	∞	1	3	6
4	4	∞	1	∞	3	∞
5	∞	∞	3	3	∞	3
6	∞	9	6	∞	3	∞

d_{ij}

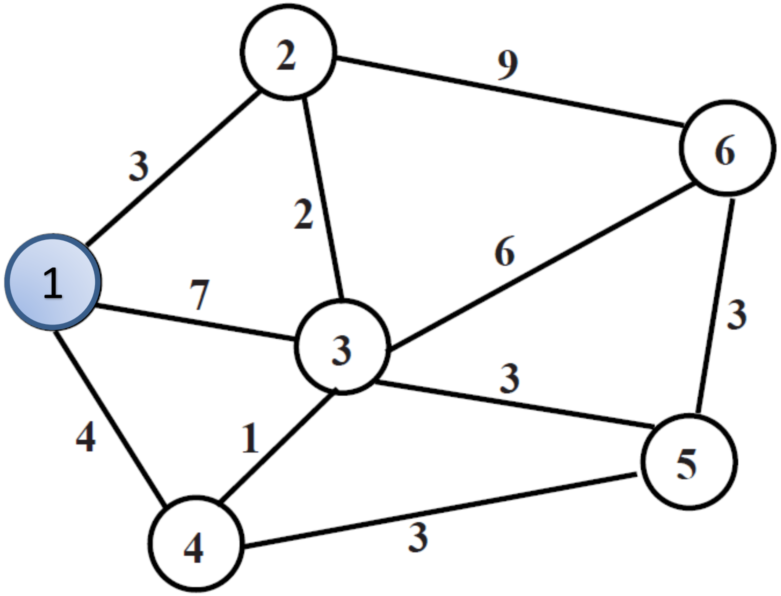


PCM - Aplicações

O PCM surge em um número surpreendentemente grande de contextos. Por exemplo, em uma rede de comunicação de dados, na qual os pacotes de dados trafegam a partir de suas origens até seus destinos; na transposição de um rio, onde o caminho mínimo pode levar a economia de milhões de dólares em desapropriações e tempo de projeto, em uma rede de transporte na qual um veículo ou pessoa deve fazer um percurso de um ponto a outro com o menor tempo de viagem, etc .

Problema do Caixeiro Viajante (PCV)

Suponha que há uma lista de cidades a serem visitadas e que as distâncias entre cada par de cidades são conhecidas. O PCV consiste em determinar a menor rota para percorrer todas as cidades, tomando uma delas como origem, visitando cada uma das outras cidades uma única vez e retornando à cidade origem [2].



PCV – Formulação matemática

Dado C={c_1, c_2,..., c_n} o conjunto de n cidades e uma matriz de adjacências/custos d_{ij} onde $d_{ij} = d(c_i, c_j)$, uma maneira de se representar matematicamente o PCV é:

$$Minimizar\ z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

$$Sujeito\ a: \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad para\ j = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad para\ i = 1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ d_{ij} = \infty\ para\ todo\ i = j$$

Onde: $x_{ij} = \begin{cases} 1, se\ cidade\ j\ pode\ ser\ alcançada\ a\ partir\ da\ cidade\ i \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$

PCV – Exemplo de solução

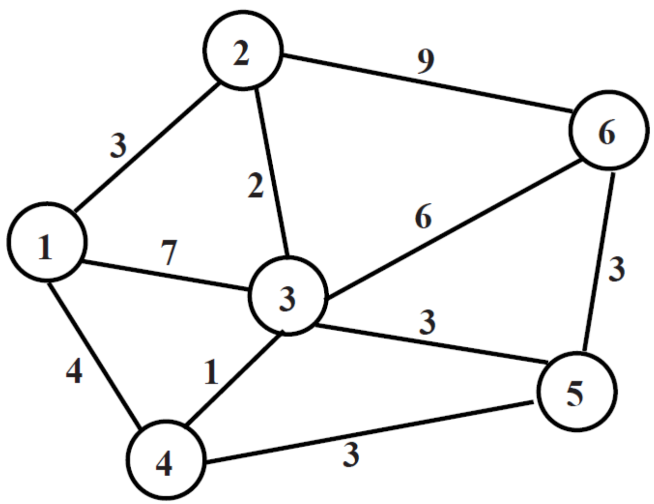
$S_0 = G = 1 \rightarrow \{x_{12}, x_{23}, x_{36}, x_{65}, x_{54}, x_{41}\} \rightarrow$ Custo z = 3+2+6+3+3+4 = 21

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0

x_{ij}

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3	7	4	∞	∞
2	3	∞	2	∞	∞	9
3	7	2	∞	1	3	6
4	4	∞	1	∞	3	∞
5	∞	∞	3	3	∞	3
6	∞	9	6	∞	3	∞

d_{ij}



PCV - Aplicações

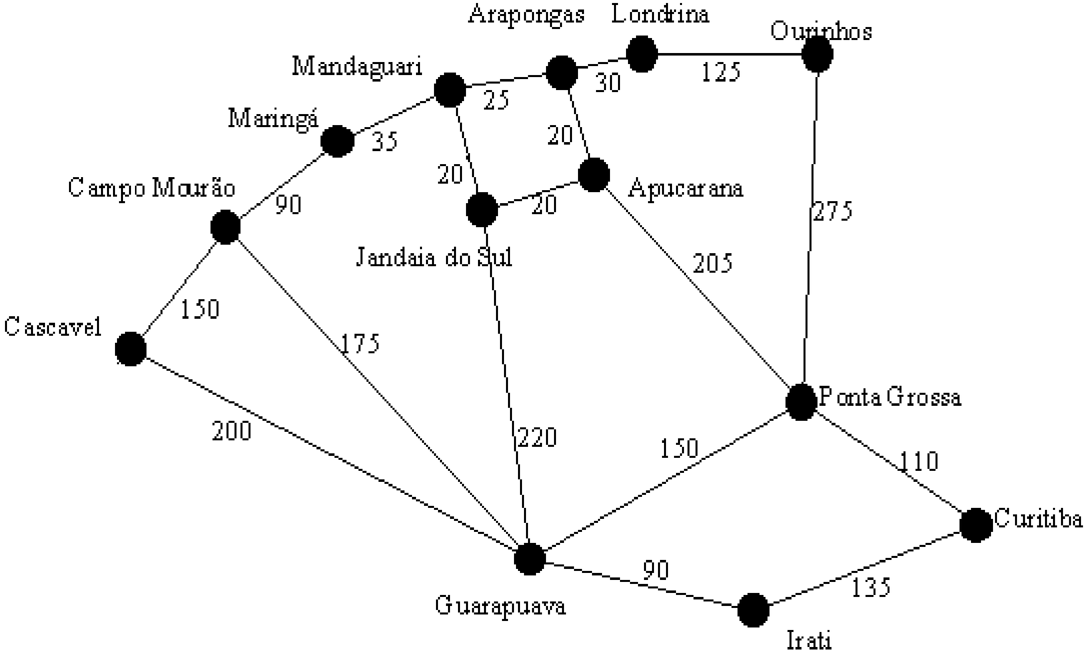
No campo teórico, o PCV é muito mais amplo que isto. Do ponto de vista da sua complexidade computacional, ele é definido como um problema NP-completo (problemas para os quais não se têm soluções em tempo polinomial). Para se ter uma ideia, um PCV com algumas centenas de cidades pode levar muitas horas para ser resolvido, pois as combinações possíveis aumentam muito rapidamente [3,4].

Além disso, o PCV é conhecido por representar uma vasta classe de problemas, como, por exemplo, geração de caminhos mais curtos para circuitos integrados com intuito de otimizar o processo de fabricação; roteamento de veículos, reduzindo o tempo de viagem e os custos com transporte e combustível; sequenciamento de produção, buscando meios mais eficientes de organizar o sistema de produção nas máquinas, a fim reduzir atrasos e aumentar a qualidade, e até mesmo no sequenciamento de DNA [4].

Embora haja na literatura bons algoritmos de aproximação para o PCV, este problema continua sendo fonte de muitas pesquisas e desenvolvimento de novos algoritmos [4].

PCV – Exemplo prático 1

Um vendedor de livros que mora na cidade de Cascavel tem que visitar, uma vez por mês, todos os seus clientes localizados nas cidades do mapa ilustrado a seguir. Ele sempre inicia as visitas pelos clientes da sua cidade e, na seqüência, visita pelo menos um cliente em cada uma das outras cidades. Com base na descrição do problema, que roteiro deve ser feito para que o vendedor minimize a distância total percorrida passando uma única vez por cada cidade e retornando à cidade de origem?



PCV – Exemplo prático 2

A programação diária da fábrica de tintas Rainbow inclui lotes de tintas branca (B), amarela (A), vermelha (V) e preta (P). Como a Rainbow usa as mesmas instalações fabris para os quatro tipos de tinta, faz-se necessário um tempo de preparação que inclui a limpeza adequada do ambiente entre a fabricação de um lote e outro. Estes tempos são dados na Tabela 1 abaixo. Considerando que o processo de fabricação sempre é iniciado pela tinta branca, determine a seqüência ótima para a produção diária dos quatro tipos de tinta que minimizará o tempo total de preparação [5]. Observe que esta situação se reduz a determinar o circuito mais curto que comece com um lote de tinta e passe por cada um dos três lotes de tinta restantes exatamente uma vez antes de voltar para a tinta inicial.

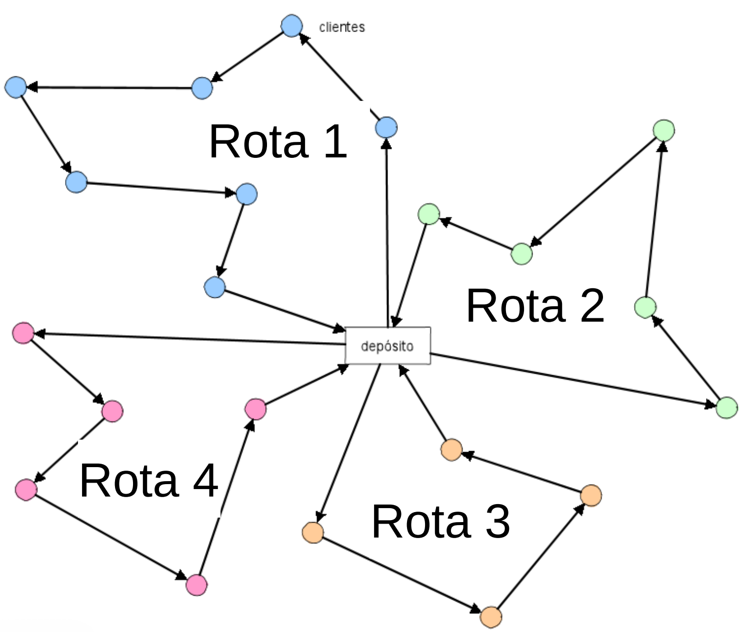
Tabela 1. Tempos de preparação. Como cada cor é produzida em um único lote, tempos de preparação infinitos são atribuídos às entradas na diagonal principal da tabela.

	Tempo de preparação em minutos, dado que a próxima tinta é:			
Tinta atual	**B**	**A**	**P**	**V**
B	∞	10	17	15
A	20	∞	19	18
P	50	44	∞	25
V	45	40	20	∞

Formule matematicamente o problema, explicando o significado de cada variável, e apresente uma solução usando uma metaheurística contida na toolbox *optimtool* do Matlab. Naturalmente, a função objetivo deve ser escrita na linguagem do ambiente Matlab.

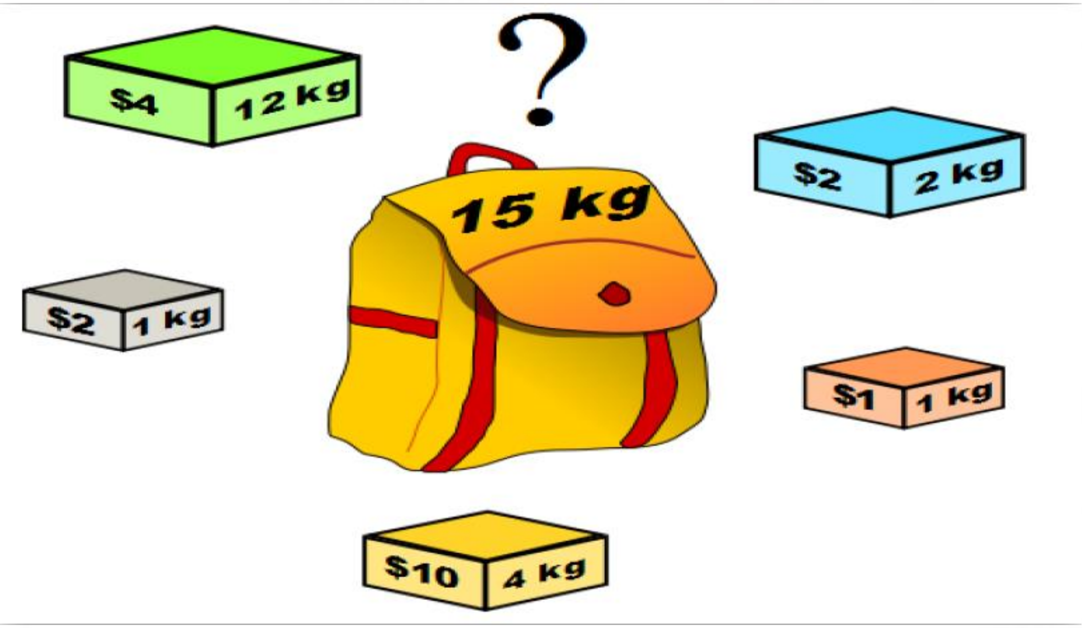
PCV x PRV

O problema de roteamento de veículos (PRV) clássico é um dos mais estudados na área da otimização combinatória. O PRV consiste no atendimento de um conjunto de clientes por uma frota de veículos que partem de um ou mais pontos denominados depósitos. A restrição do PRV é que cada veículo v_i possui uma capacidade C_i e o somatório de todas as demandas dos consumidores atendidos por um veículo v_i devem ser menor ou igual a C_i. O PRV pode ser visto como uma generalização do PCV onde se tem múltiplos caixeiros viajantes, levando ao PMCV.



Problema da Mochila (PM)

Definição genérica do PM: Suponha que é necessário carregar uma mochila de capacidade limitada com um conjunto objetos com pesos e valores diferentes. O objetivo é ocupar a mochila com o maior valor possível, sem ultrapassar o seu peso máximo. A solução deste problema consiste em definir o subconjunto de objetos cuja a soma dos pesos não ultrapasse o limite de carga da mochila e, ao mesmo tempo, maximize o valor total da carga [2].



PM - Variações

Há variações do PM dependendo da distribuição de itens e mochilas. Algumas delas estão relacionadas a seguir:

- PM 0-1 (ou binário): cada item pode ser escolhido no máximo 1 vez;
- PM limitado: considera-se uma quantidade limitada para cada tipo de item;
- PM com múltipla escolha: os itens devem ser escolhidos de classes disjuntas;
- Problema da mochila múltiplo: várias mochilas são preenchidas simultaneamente

PM 0-1 – Formulação matemática

Considerando X={x_1, x_2,..., x_n} o conjunto de *n* objetos ou itens, no qual cada objeto é denotado por x_i e que $x_i = 1$ se o objeto aparece na mochila ou $x_i = 0$, caso contrário; W={w_1, w_2,..., w_n} o conjunto de pesos dos objetos no qual w_i é o peso do i-ésimo objeto; V={v_1, v_2,..., v_n} o conjunto de valores dos objetos onde v_i denota o peso do i-ésimo objeto e *c* a capacidade da mochila. Então, o PM 0-1 pode ser formulado matematicamente da seguinte maneira:

$$Maximizar\, z = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

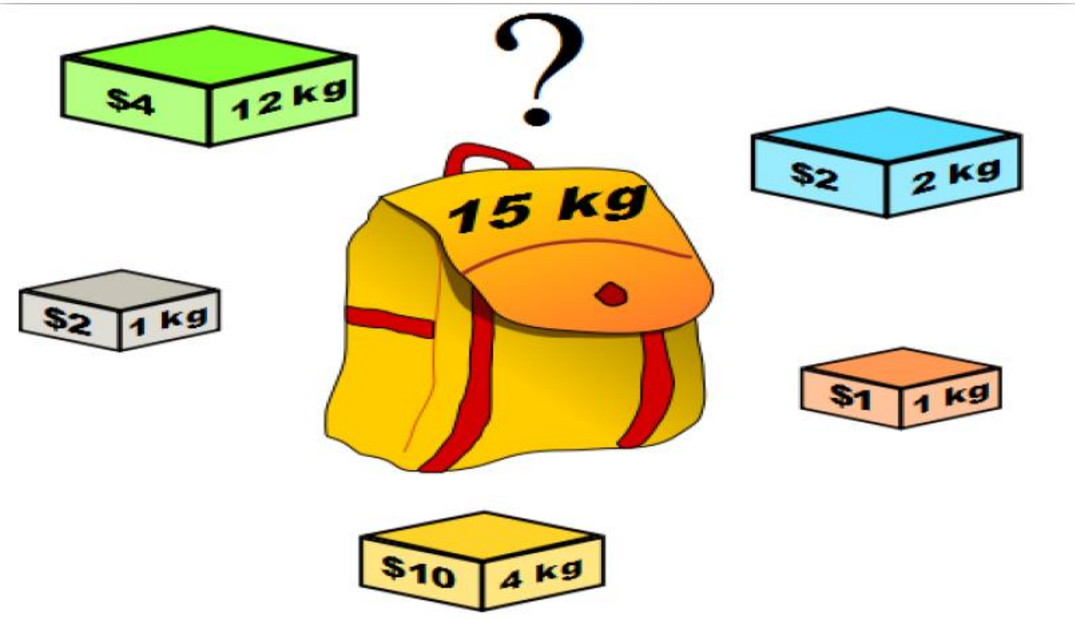
$$Sujeito\, a: \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq c,$$

$$x_i \in \{0,1\}$$

Neste caso, a solução do problema consiste em um vetor binário de tamanho *n* que indica quais objetos devem ser colocados na mochila.

PM – Exemplo de solução

n=5, *c*=15, X={*1,2,3,4,5*}, W={*12,2,1,1,4*} , V={4,*2,2,1,10*}
Solução = {0,1,1,1,1}
z = 4*0+2*1+2*1+1*1+10*1 = 15
Restrição → 12*0+2*1+1*1+1*1+4*1=8 ≤ 15



PM - Aplicações

O PM, que também é NP-Completo, constitui junto com o PCV uma classe de problemas amplamente estudados em otimização combinatória.

Muitos problemas reais podem ser formulados como o PM ou uma variação dele. Entre os mais conhecidos estão: seleção de carteiras de investimento, corte e empacotamento, carregamento de veículos, planejamento da produção, desenvolvimento de circuitos eletrônicos, além de muitos outros.

Considerando que o PM é um problema de natureza combinatória, ele pode ser resolvido por busca exaustiva. Contudo, a enumeração exaustiva destas soluções é inviável, mesmo no caso de pequenas dimensões. Só para se ter uma ideia, um problema com apenas 20 itens possui aproximadamente 1.048.576 soluções.

PM – Exemplo prático 1

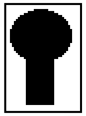
A Arte & Design produz 8 tipos de estantes (E1,E2,...,E8). Cada tipo de estante fabricada gera um lucro e incorre em um custo de preparação, conforme mostra a Tabela 2. Considerando que, devido às características da linha de produção, no máximo uma unidade de cada tipo de estante pode ser fabricada por dia e que o custo máximo de preparação da fábrica para uma determinada data foi fixado em R$6.000,00, determine o mix de estantes a serem fabricadas na data em questão para que a empresa maximize seu lucro sem exceder o custo máximo de preparação estipulado [6].

Tabela 2. Custos de preparação e lucros das estantes fabricadas pela Arte & Design.

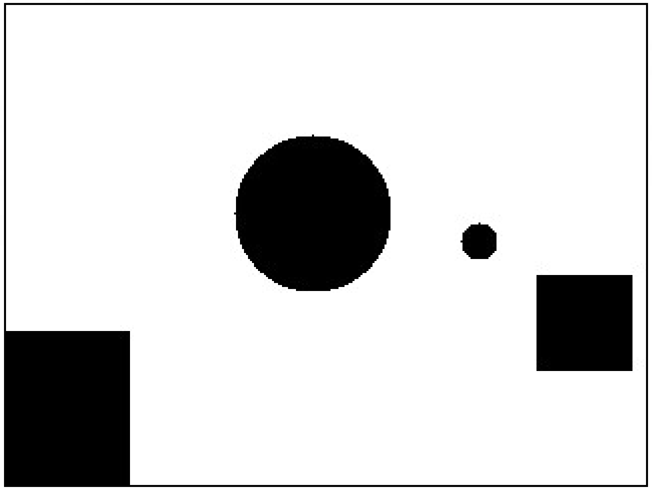
	Tipos de estante							
	E1	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**E7**	**E8**
Lucro unitário	R$80,00	R$100,00	R$200,00	R$170,00	R$150,00	R$140,00	R$150,00	R$250,00
Custo de preparação	R$500,00	R$1.000,00	R$2.000,00	R$700,00	R$550,00	R$840,00	R$900,00	R$2.500,00

Formule matematicamente o problema, explicando o significado de cada variável, e apresente uma solução usando uma metaheurística contida na toolbox *optimtool* do Matlab. Naturalmente, a função objetivo deve ser escrita na linguagem do ambiente Matlab.

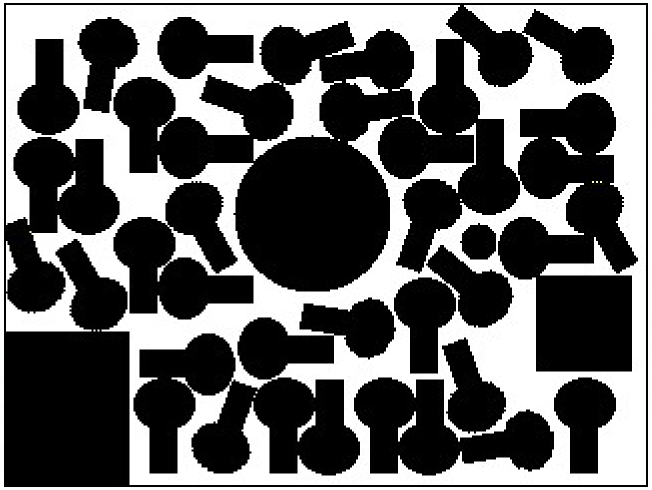
PM – Exemplo prático 2



Peça



Placa



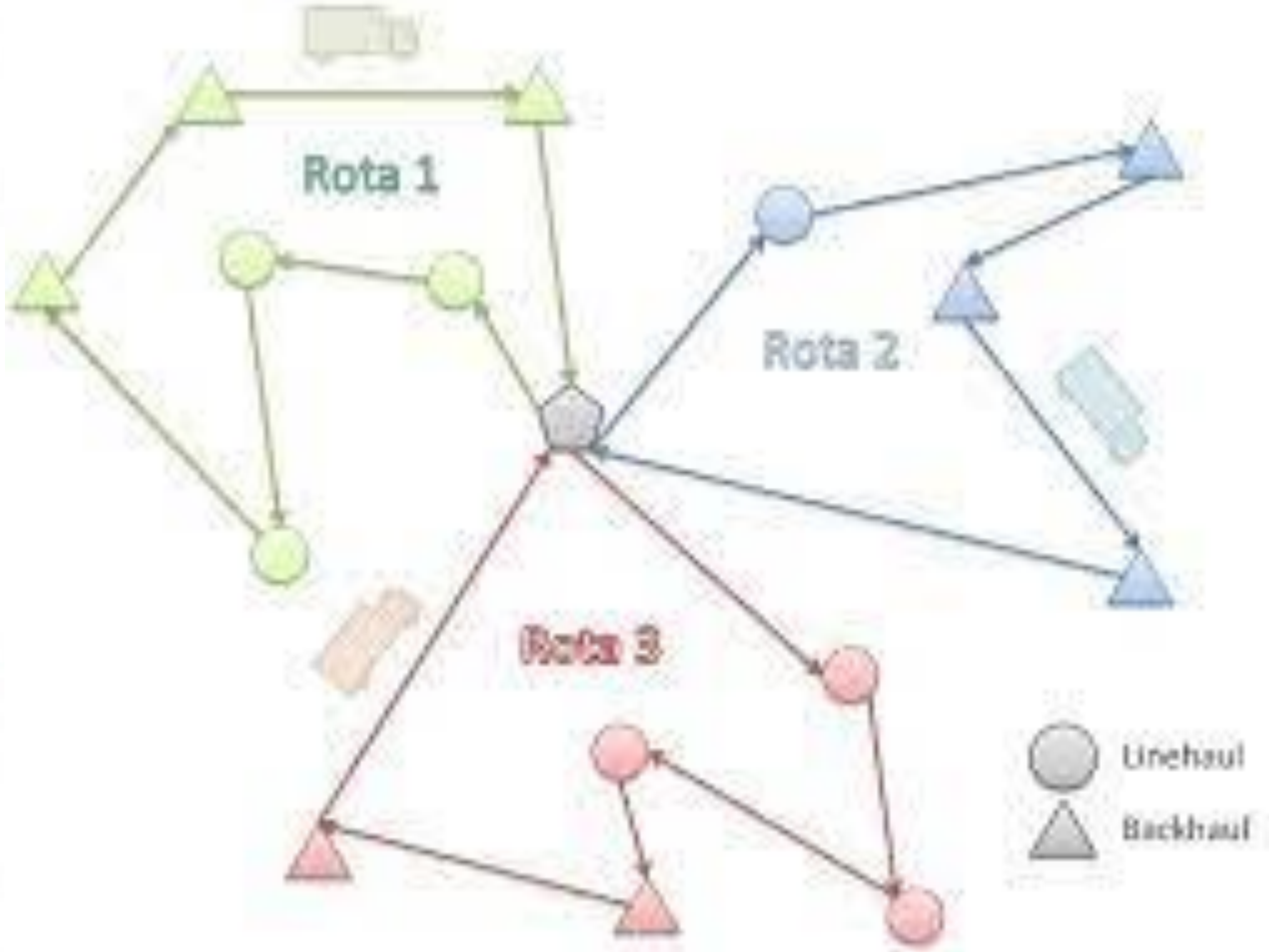
Otimização do corte

PM – Exemplo prático 3

Resumo dos conceitos... Problema prático envolvendo PCM, PCV e PM

UNINOVE
Universidade Nove de Julho
A UNINOVE É SEMPRE 10

Problema integrado: roteamento de veículos e empacotamento



Referências

[1] ARENALES, Marcos; ARMENTANO, Vinicius; MORABITO, Reinaldo; YANASSE, Horácio; *Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia*; Rio de Janeiro: Editora Campus (Elsevier), 2008. 526p

[2] CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. Introduction to Algorithms. 2 ed. United States of America: MIT Press, 2001.

[3] RUSSEL, S.; NORVIG, P. Artificial intelligence a modern approach. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

[4] COELHO, L. C. Série Pesquisa Operacional – Problema do Caixeiro Viajante. Disponível em: http://www.logisticadescomplicada.com/serie-pesquisa-operacional-%E2%80%93-problema-do-caixeiro-viajante/ Acessado em: 28/03/2013.

[5] TAHA, H. A. Pesquisa Operacional. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

[6] LACHTERMACHER, G. Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões. 4. ed. São Paulo: Pearson/Prentice Hall, 2009.

UNINOVE
Universidade Nove de Julho
A UNINOVE É SEMPRE 10